線形空間の入門編 Part1

あけまつしんじ

j1701

March 15, 2013

高専の線形代数

- 行列とベクトルの**計算**がメイン.

高専の線形代数

- 行列とベクトルの**計算**がメイン.
- 固有値を**計算**, 対角化を**計算**

高専の線形代数

- 行列とベクトルの**計算**がメイン.
- 固有値を**計算**, 対角化を**計算**
- 階数を**計算**, 行列式を**計算** $\cdots$

高専の線形代数

- 行列とベクトルの**計算**がメイン.
- 固有値を**計算**, 対角化を**計算**
- 階数を**計算**, 行列式を**計算** $\cdots$
- **計算**, **計算**, **計算**, **計算**, $\cdots$

(´・ ω ・`)

一方, 線形空間の話はというと

もっともっと数学的な考え方が中核に!!

- 線形写像 $f : V \to W$ が

一方, 線形空間の話はというと

もっともっと数学的な考え方が中核に!!

- 線形写像 $f : V \to W$ が
  - 全射 (surjection) とは?

一方, 線形空間の話はというと

もっともっと数学的な考え方が中核に!!

- 線形写像 $f : V \to W$ が
  - 全射 (surjection) とは？
  - 単射 (injection) とは？

一方, 線形空間の話はというと

もっともっと数学的な考え方が中核に!!

- 線形写像 $f : V \to W$ が
  - 全射 (surjection) とは?
  - 単射 (injection) とは?
  - 全単射 (bijection) とは?

一方, 線形空間の話はというと

もっともっと数学的な考え方が中核に!!

- 線形写像 $f : V \to W$ が
  - 全射 (surjection) とは?
  - 単射 (injection) とは?
  - 全単射 (bijection) とは?
- $\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Ker}\, f$ が部分空間であることを**示せ**.

一方, 線形空間の話はというと

もっともっと数学的な考え方が中核に!!

- 線形写像 $f : V \to W$ が
  - 全射 (surjection) とは?
  - 単射 (injection) とは?
  - 全単射 (bijection) とは?
- $\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Ker}\, f$ が部分空間であることを**示せ**.
- $V/\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Im}\, f$, $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim V$ は**なぜ言える??**

線形代数の広がり

- 線形代数は使える数学!!

線形代数の広がり

- 線形代数は使える数学!!

群論，環論，体論

微分幾何学，ベクトル解析

線形代数

符号理論，情報理論，信号処理

このレクチャーの目標

- 理学部数学科で扱う数学の考え方に触れる.

このレクチャーの目標

- 理学部数学科で扱う数学の考え方に触れる.
- 「証明」の感じをつかむ. 少しでも慣れる.

このレクチャーの目標

- 理学部数学科で扱う数学の考え方に触れる.
- 「証明」の感じをつかむ. 少しでも慣れる.
- 俺が **beamer** に慣れる.
  (練習のために, このスライドは **beamer** という環境で作った.)

このレクチャーの目標

- 理学部数学科で扱う数学の考え方に触れる.
- 「証明」の感じをつかむ. 少しでも慣れる.
- 俺が **beamer** に慣れる.
  (練習のために, このスライドは **beamer** という環境で作った.)
  (学会とかでスタンダードなプレゼン環境なので,
  卒研発表でぜひ使ってみよう!!)

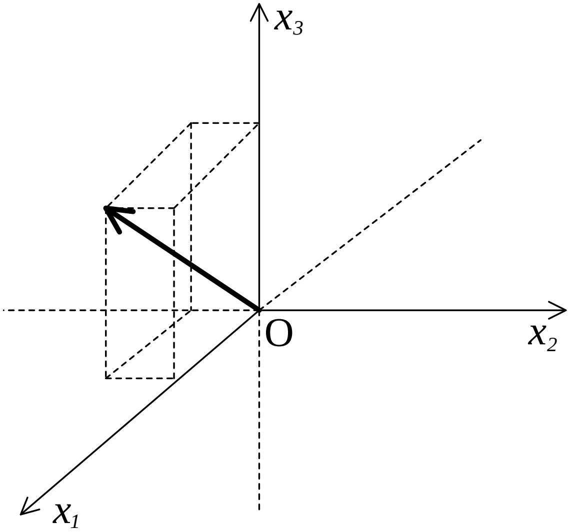
table of contents

$\mathbb{R}^n$

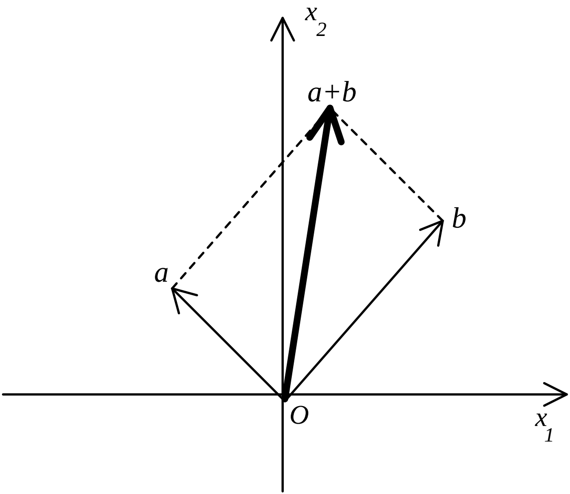
定義

$$\mathbb{R}^n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

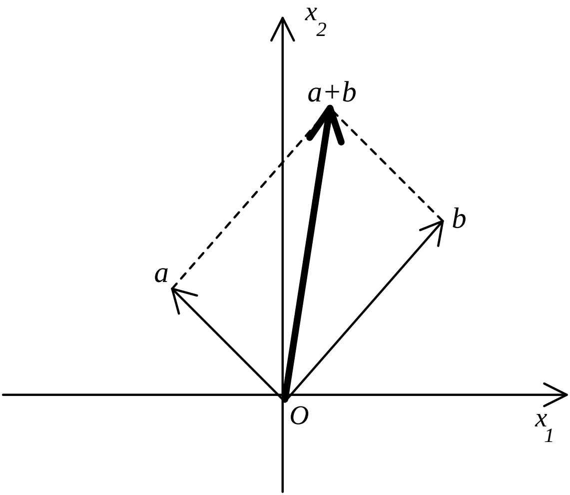
$n = 3$ のときの例 ($\mathbb{R}^3$)



$\mathbb{R}^n$ の性質



$\mathbb{R}^n$ の性質



ベクトルの和はまたベクトル!!

$\mathbb{R}^n$ の性質

これを数式で書いてみよう.

$\mathbb{R}^n$ の性質

これを数式で書いてみよう.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^n$$

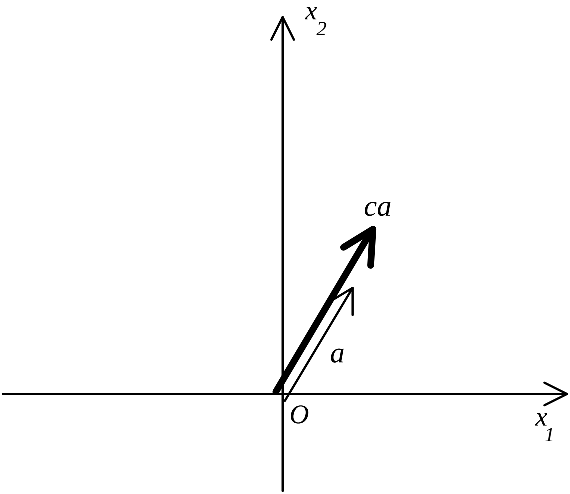
$\mathbb{R}^n$ の性質

これを数式で書いてみよう.

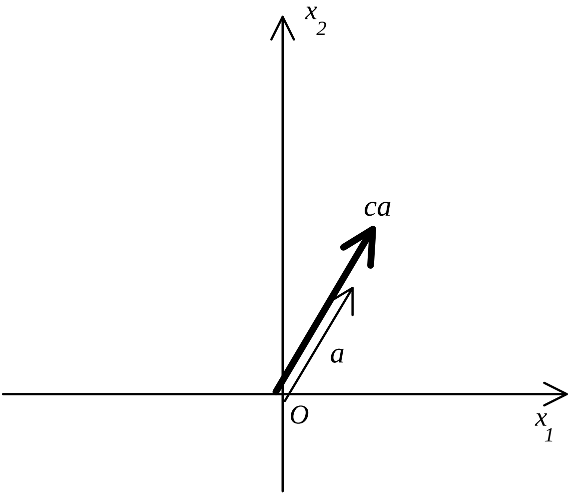
$$\forall a, b \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n$ の性質



$\mathbb{R}^n$ の性質



ベクトルのスカラー (実数) 倍はまたベクトル!!

$\mathbb{R}^n$ の性質

これを数式で書いてみよう.

$\mathbb{R}^n$ の性質

これを数式で書いてみよう.

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^n$ の性質

これを数式で書いてみよう.

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow ca \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathbb{R}^n$ の性質

命題

- $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^n.$
  ($\mathbb{R}^n$ は和について閉じている)

$\mathbb{R}^n$ の性質

命題

- $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^n$.
  ($\mathbb{R}^n$ は和について閉じている)
- $\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow ca \in \mathbb{R}^n$.
  ($\mathbb{R}^n$ はスカラー (実数) 倍について閉じている)

$\mathbb{R}^n$ の性質

さらに, 次のような細かい性質もすぐに調べれば分かる.
(8 つの代数的性質)

命題

- 和について $\cdots$
  - $\exists 0 \in \mathbb{R}^n \quad s.t. \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)

$\mathbb{R}^n$ の性質

さらに, 次のような細かい性質もすぐに調べれば分かる.
(8 つの代数的性質)

命題

- 和について $\cdots$
  - $\exists 0 \in \mathbb{R}^n \quad s.t. \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
  - $\forall a \in \mathbb{R}^n, \exists(-a) \in \mathbb{R}^n \ s.t. \ a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)

$\mathbb{R}^n$ の性質

さらに, 次のような細かい性質もすぐに調べれば分かる.
(8 つの代数的性質)

命題

- 和について $\cdots$
  - $\exists 0 \in \mathbb{R}^n \quad s.t. \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
  - $\forall a \in \mathbb{R}^n, \exists (-a) \in \mathbb{R}^n \ s.t. \ a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)
  - $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b = b + a.$ (可換)

$\mathbb{R}^n$ の性質

さらに, 次のような細かい性質もすぐに調べれば分かる.
(8 つの代数的性質)

命題

- 和について $\cdots$
  - $\exists 0 \in \mathbb{R}^n \quad s.t. \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
  - $\forall a \in \mathbb{R}^n, \exists (-a) \in \mathbb{R}^n \ s.t. \ a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)
  - $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b = b + a.$ (可換)
  - $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c).$ (結合法則)

$\mathbb{R}^n$ の性質

さらに, 次のような細かい性質もすぐに調べれば分かる.
(8 つの代数的性質)

命題

- 和について $\cdots$
  - $\exists 0 \in \mathbb{R}^n \quad s.t. \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
  - $\forall a \in \mathbb{R}^n, \exists(-a) \in \mathbb{R}^n \ s.t. \ a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)
  - $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b = b + a.$ (可換)
  - $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c).$ (結合法則)

$\mathbb{R}^n$ の性質

さらに, 次のような細かい性質もすぐに調べれば分かる.
(8 つの代数的性質)

命題

- 和について $\cdots$
  - $\exists 0 \in \mathbb{R}^n \quad s.t. \;\; \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
  - $\forall a \in \mathbb{R}^n, \exists(-a) \in \mathbb{R}^n \; s.t. \; a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)
  - $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b = b + a.$ (可換)
  - $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c).$ (結合法則)
- スカラー倍について $\cdots$
  - $\forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow 1a = a.$ (1 倍しても変わらない)

$\mathbb{R}^n$ の性質

さらに, 次のような細かい性質もすぐに調べれば分かる.

(8 つの代数的性質)

命題

- 和について $\cdots$
  - $\exists 0 \in \mathbb{R}^n \quad s.t.\ \ \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
  - $\forall a \in \mathbb{R}^n, \exists(-a) \in \mathbb{R}^n\ s.t.\ a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)
  - $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b = b + a.$ (可換)
  - $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c).$ (結合法則)
- スカラー倍について $\cdots$
  - $\forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow 1a = a.$ (1 倍しても変わらない)
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (分配法則)

$\mathbb{R}^n$ の性質

さらに, 次のような細かい性質もすぐに調べれば分かる.
(8 つの代数的性質)

命題

- 和について $\cdots$
  - $\exists 0 \in \mathbb{R}^n \quad s.t. \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
  - $\forall a \in \mathbb{R}^n, \exists(-a) \in \mathbb{R}^n \ s.t. \ a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)
  - $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b = b + a.$ (可換)
  - $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c).$ (結合法則)
- スカラー倍について $\cdots$
  - $\forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow 1a = a.$ (1 倍しても変わらない)
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (分配法則)
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (分配法則)

$\mathbb{R}^n$ の性質

さらに, 次のような細かい性質もすぐに調べれば分かる.

(8 つの代数的性質)

命題

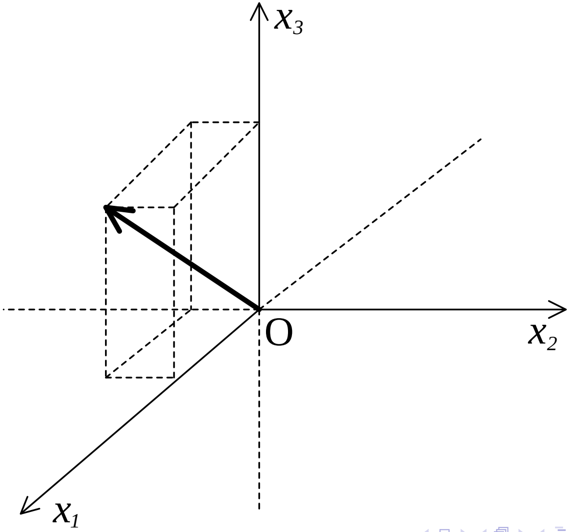
- 和について$\cdots$
  - $\exists 0 \in \mathbb{R}^n \quad s.t. \;\; \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
  - $\forall a \in \mathbb{R}^n, \exists(-a) \in \mathbb{R}^n \; s.t. \; a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)
  - $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b = b + a.$ (可換)
  - $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c).$ (結合法則)
- スカラー倍について$\cdots$
  - $\forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow 1a = a.$ (1 倍しても変わらない)
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (分配法則)
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (分配法則)
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a).$

「公理化」という考え方

いままで, ベクトルとは, **向きと大きさを持った量 (矢印)** のことだった.

「公理化」という考え方

いままで, ベクトルとは, **向きと大きさを持った量 (矢印)** のことだった.



「公理化」という考え方

んで, その**「矢印」**としての**「ベクトル」**は,
「さっきみたいな性質」を満たしてた.

んで, その**「矢印」**としての**「ベクトル」**は,
「さっきみたいな性質」を満たしてた.

命題

- $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^n.$
- $\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow ca \in \mathbb{R}^n.$
- $\exists 0 \in \mathbb{R}^n \quad s.t. \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
- $\forall a \in \mathbb{R}^n, \exists (-a) \in \mathbb{R}^n \; s.t. \; a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)
- $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a + b = b + a.$ (可換)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c).$ (結合法則)
- $\forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow 1a = a.$ (1 倍しても変わらない)
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (分配法則)
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (分配法則)
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a).$

「公理化」という考え方

今までの流れ

ベクトル ⇒ さっきの性質を満たす!!
(「ベクトル」というものが，「矢印」として最初からある!!)

「公理化」という考え方

逆に考えるんだ

「公理化」という考え方

逆に考えるんだ

「さっきの性質を満たすなら，それはベクトルだ」

「公理化」という考え方

逆に考えるんだ

「さっきの性質を満たすなら，それはベクトルだ」

と考えるんだ

「公理化」という考え方

つまり，「さっきの性質」を満たすものは $\cdots$

超重要 point!!

別に矢印じゃなかろうが，すべて「ベクトル」だと呼ぶことにしよう!!

という発想の転換をする．

「公理化」という考え方

定義

ある集合 V が次の性質を満たすとき, V は **$\mathbb{R}$-線形空間 ($\mathbb{R}$-linear space)** であるという.

「公理化」という考え方

定義

ある集合 V が次の性質を満たすとき, V は $\mathbb{R}$-**線形空間 ($\mathbb{R}$-linear space)** であるという.

- $\forall a, b \in V \Rightarrow a + b \in V$.
  (V は和について閉じている)
- $\forall a \in V, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow ca \in V$.
  (V はスカラー (実数) 倍について閉じている)

8 つの代数的性質

定義

- 和について $\cdots$
  - $\exists 0 \in V \quad s.t. \quad \forall a \in V \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
  - $\forall a \in V, \exists(-a) \in V \ s.t. \ a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)
  - $\forall a, b \in V \Rightarrow a + b = b + a.$ (可換)
  - $\forall a, b, c \in V \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c).$ (結合法則)
- スカラー倍について $\cdots$
  - $\forall a \in V \Rightarrow 1a = a.$ (1 倍しても変わらない)
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in V \Rightarrow (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (分配法則)
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in V \Rightarrow \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (分配法則)
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in V \Rightarrow (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a).$

8 つの代数的性質

定義

- 和について・・・
  - $\exists 0 \in V \quad s.t. \quad \forall a \in V \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a.$ (ゼロベクトル)
  - $\forall a \in V, \exists(-a) \in V \ s.t. \ a + (-a) = (-a) + a = 0.$ (和の逆元)
  - $\forall a, b \in V \Rightarrow a + b = b + a.$ (可換)
  - $\forall a, b, c \in V \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c).$ (結合法則)
- スカラー倍について・・・
  - $\forall a \in V \Rightarrow 1a = a.$ (1 倍しても変わらない)
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in V \Rightarrow (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (分配法則)
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in V \Rightarrow \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (分配法則)
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in V \Rightarrow (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a).$

そして, 線形空間 V の元のことを**ベクトル (vector)** と呼ぶ.

「公理化」という考え方

$\mathbb{R}^n$ から重要な性質だけを抽出

「公理化」という考え方

$\mathbb{R}^n$ から**重要な性質だけを抽出**
$\Rightarrow$ それを**新たな定義 (公理)** とした.

「公理化」という考え方

$\mathbb{R}^n$ から**重要な性質だけを抽出**

$\Rightarrow$ それを**新たな定義 (公理)** とした.

大切な考え方

数学ではこれを**公理化**という.

「公理化」という考え方

$\mathbb{R}^n$ から**重要な性質だけを抽出**

$\Rightarrow$ それを**新たな定義 (公理)** とした.

大切な考え方

数学ではこれを**公理化**という.

- $\mathbb{R}$-線形空間は, $\mathbb{R}^n$ **の公理化!!**

んで, 何が嬉しいのか？

線形空間を考えて嬉しいこと

今まで考えもしなかったものが**ベクトルに見えてくる!!**

行列 is vector

定義

$$M_2(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j \in \{1, 2\} \right\}.$$

たとえば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi & e \\ e & \pi \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

行列 is vector

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

行列 is vector

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

$$c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

行列 is vector

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

$$c\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

さらに, **8 つの代数的性質**も満たす.

行列 is vector

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

$$c\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

さらに, **8 つの代数的性質**も満たす.

$\therefore M_2(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$-線形空間なので, 実係数の 2 次行列は**ベクトル!!**
(n 次の場合についても, 同様に $\mathbb{R}$-線形空間といえる.)

関数 is vector

定義

$$C^1(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \{f(x) \mid f(x) \text{ は少なくとも 1 回微分可能.} \}$$

たとえば,

$$x, \sin x, e^x \in C^1(x).$$

関数 is vector

$\forall f(x), g(x) \in C^1(x), c \in \mathbb{R}$ としよう.

関数 is vector

$\forall f(x), g(x) \in C^1(x), c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$f(x) + g(x) \in C^1(x).$$

関数 is vector

$\forall f(x), g(x) \in C^1(x), c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$f(x) + g(x) \in C^1(x).$$

$\because (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ なので,
$f(x) + g(x)$ も少なくとも 1 回微分可能.

関数 is vector

$\forall f(x), g(x) \in C^1(x), c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$f(x) + g(x) \in C^1(x).$$

$\because (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ なので,
$f(x) + g(x)$ も少なくとも 1 回微分可能.

$$cf(x) \in C^1(x).$$

関数 is vector

$\forall f(x), g(x) \in C^1(x), c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$f(x) + g(x) \in C^1(x).$$

$\because (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ なので,
$f(x) + g(x)$ も少なくとも 1 回微分可能.

$$cf(x) \in C^1(x).$$

$\because (cf(x))' = cf'(x)$ なので, $cf(x)$ も少なくとも 1 回微分可能.

関数 is vector

$\forall f(x), g(x) \in C^1(x), c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$f(x) + g(x) \in C^1(x).$$

$\because (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ なので,
$f(x) + g(x)$ も少なくとも 1 回微分可能.

$$cf(x) \in C^1(x).$$

$\because (cf(x))' = cf'(x)$ なので, $cf(x)$ も少なくとも 1 回微分可能.

さらに, **8 つの代数的性質**も満たす.

関数 is vector

$\forall f(x), g(x) \in C^1(x), c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$f(x) + g(x) \in C^1(x).$$

$\because (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ なので,
$f(x) + g(x)$ も少なくとも 1 回微分可能.

$$cf(x) \in C^1(x).$$

$\because (cf(x))' = cf'(x)$ なので, $cf(x)$ も少なくとも 1 回微分可能.

さらに, **8 つの代数的性質**も満たす.

$\therefore C^1(x)$ は $\mathbb{R}$-線形空間なので,
「少なくとも 1 回微分可能な実関数」は**ベクトル!!**

定数係数 2 階斉次線形微分方程式の解 is vector

次の定数係数 2 階斉次線形微分方程式を考える.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0.$$

また, この微分方程式の**解空間** S を考える.

$$S \overset{\text{def}}{=} \{y(x) \mid y(x) \text{ is solution of } \uparrow\}$$

定数係数2階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall y_1, y_2 \in S$ としよう.

定数係数 2 階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall y_1, y_2 \in S$ としよう.

$$\frac{d^2(y_1+y_2)}{dx^2} + a\frac{d(y_1+y_2)}{dx} + b(y_1+y_2)$$

定数係数2階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall y_1, y_2 \in S$ としよう.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2(y_1+y_2)}{dx^2} + a\frac{d(y_1+y_2)}{dx} + b(y_1+y_2) \\
= \quad &\left(\frac{d^2 y_1}{dx^2} + a\frac{dy_1}{dx} + by_1\right) + \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2} + a\frac{dy_2}{dx} + by_2\right)
\end{aligned}
$$

定数係数 2 階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall y_1, y_2 \in S$ としよう.

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2(y_1+y_2)}{dx^2} + a\frac{d(y_1+y_2)}{dx} + b(y_1+y_2) \\
= & \left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + a\frac{dy_1}{dx} + by_1\right) + \left(\frac{d^2y_2}{dx^2} + a\frac{dy_2}{dx} + by_2\right) \\
= & \; 0 + 0
\end{aligned}
$$

定数係数 2 階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall y_1, y_2 \in S$ としよう.

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2(y_1+y_2)}{dx^2} + a\frac{d(y_1+y_2)}{dx} + b(y_1+y_2) \\
= \quad & \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2} + a\frac{dy_1}{dx} + by_1\right) + \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2} + a\frac{dy_2}{dx} + by_2\right) \\
= \quad & 0 + 0 \\
= \quad & 0.
\end{aligned}
$$

定数係数 2 階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall y_1, y_2 \in S$ としよう.

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2(y_1+y_2)}{dx^2} + a\frac{d(y_1+y_2)}{dx} + b(y_1+y_2) \\
= \; & \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2} + a\frac{dy_1}{dx} + by_1\right) + \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2} + a\frac{dy_2}{dx} + by_2\right) \\
= \; & 0 + 0 \\
= \; & 0.
\end{aligned}
$$

$\therefore y_1 + y_2$ もやっぱり解なので, $y_1 + y_2 \in S$.

定数係数 2 階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall c \in \mathbb{R}$ としよう.

定数係数2階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$\frac{d^2(cy_1)}{dx^2} + a\frac{d(cy_1)}{dx} + b(cy_1)$$

定数係数2階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2(cy_1)}{dx^2} + a\frac{d(cy_1)}{dx} + b(cy_1) \\
= \quad & c\left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + a\frac{dy_1}{dx} + by_1\right)
\end{aligned}
$$

定数係数 2 階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2(cy_1)}{dx^2} + a\frac{d(cy_1)}{dx} + b(cy_1) \\
= \quad & c\left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + a\frac{dy_1}{dx} + by_1\right) \\
= \quad & c \cdot 0
\end{aligned}$$

定数係数2階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2(cy_1)}{dx^2} + a\frac{d(cy_1)}{dx} + b(cy_1) \\
= \quad & c\left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + a\frac{dy_1}{dx} + by_1\right) \\
= \quad & c \cdot 0 \\
= \quad & 0.
\end{aligned}
$$

定数係数2階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2(cy_1)}{dx^2} + a\frac{d(cy_1)}{dx} + b(cy_1) \\
= \quad & c\left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + a\frac{dy_1}{dx} + by_1\right) \\
= \quad & c \cdot 0 \\
= \quad & 0.
\end{aligned}
$$

$\therefore cy_1$ もやっぱり解なので, $cy_1 \in S$.

さらに, **8 つの代数的性質**も満たす.

定数係数 2 階斉次線形微分方程式の解 is vector

$\forall c \in \mathbb{R}$ としよう.

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2(cy_1)}{dx^2} + a\frac{d(cy_1)}{dx} + b(cy_1) \\
= \ & c\left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + a\frac{dy_1}{dx} + by_1\right) \\
= \ & c \cdot 0 \\
= \ & 0.
\end{aligned}
$$

$\therefore cy_1$ もやっぱり解なので, $cy_1 \in S$.

さらに, **8 つの代数的性質**も満たす.

$\therefore S$ は $\mathbb{R}$-線形空間なので,
「定数係数 2 階斉次線形微分方程式の解」は**ベクトル!!**

つまり...

今まで高専でやってきた線形代数は...

ただの「$\mathbb{R}^n$ **バージョン**」でしかなかったのだ!!!!

線形独立, 線形従属

復習

$v_1, v_2, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ が**線形独立 (linearly independent)** であるとは, **線形関係式 (linearly relation)**

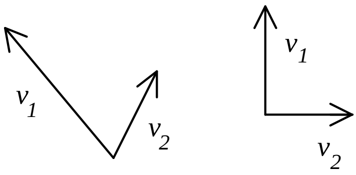
$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0.$$

を満たすような $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ が,

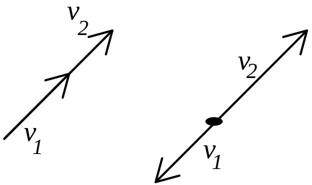
$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

に限るときのことをいった. また, $v_1, v_2, \cdots, v_n$ が**線形独立でないこと**を, **線形従属 (linearly dependent)** といった.

線形独立, 線形従属



linearly independent



linearly dependent

線形独立, 線形従属

この「線形独立, 線形従属」の定義を, そのまま線形空間でも使おう!!

線形独立, 線形従属

この「線形独立, 線形従属」の定義を, そのまま線形空間でも使おう!!

定義

$v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ が**線形独立 (linearly independent)** であるとは,
線形関係式 (linearly relation)

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0.$$

を満たすような $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ が,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

に限るときのことをいう. また, $v_1, v_2, \cdots, v_n$ が**線形独立でない**ことを,
線形従属 (linearly dependent) という.

Example. 行列の線形独立

この定義によって，「行列」が線形独立かどうかとか，
「関数」が線形独立かどうかとかを調べられる．

Example. 行列の線形独立

この定義によって，「行列」が線形独立かどうかとか，
「関数」が線形独立かどうかとかを調べられる．

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

この 2 つの行列は線形独立? 線形従属?

Example. 行列の線形独立

この定義によって，「行列」が線形独立かどうかとか，
「関数」が線形独立かどうかとかを調べられる．

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

この 2 つの行列は線形独立? 線形従属?

こういうときは，**とにかく定義にしたがって，線形関係式!!**

Example. 行列の線形独立

この定義によって，「行列」が線形独立かどうかとか，
「関数」が線形独立かどうかとかを調べられる．

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

この 2 つの行列は線形独立? 線形従属?

こういうときは，**とにかく定義にしたがって，線形関係式!!**

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Example. 行列の線形独立

この定義によって，「行列」が線形独立かどうかとか，
「関数」が線形独立かどうかとかを調べられる．

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

この 2 つの行列は線形独立? 線形従属?

こういうときは，**とにかく定義にしたがって，線形関係式!!**

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

左辺をまとめてみると，

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Example. 行列の線形独立

この定義によって，「行列」が線形独立かどうかとか，
「関数」が線形独立かどうかとかを調べられる．

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

この 2 つの行列は線形独立？ 線形従属？

こういうときは，**とにかく定義にしたがって，線形関係式!!**

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

左辺をまとめてみると，

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

各成分を比較すると，$c_1 = 0, c_2 = 0$ なので，**線形独立!!** □

Example. 関数の線形独立

例

$$e^x, e^{2x}, e^{3x} \in C^1(x).$$

この 3 つの関数は線形独立? 線形従属?

Example. 関数の線形独立

例

$$e^x, e^{2x}, e^{3x} \in C^1(x).$$

この 3 つの関数は線形独立? 線形従属?

線形関係式

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0.$$

これだけだと c_1, c_2, c_3 は分からないので

秘技 **「微分」** で関係式を増やす!!

Example. 関数の線形独立

微分で関係式を 3 本にしてみよう.

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0.$$

Example. 関数の線形独立

微分で関係式を 3 本にしてみよう.

$$\begin{aligned} c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} &= 0. \\ c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} + 3c_3 e^{3x} &= 0. \end{aligned}$$

Example. 関数の線形独立

微分で関係式を 3 本にしてみよう.

$$
\begin{aligned}
c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} &= 0. \\
c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 3c_3e^{3x} &= 0. \\
c_1e^x + 4c_2e^{2x} + 9c_3e^{3x} &= 0.
\end{aligned}
$$

行列でかくと

Example. 関数の線形独立

微分で関係式を 3 本にしてみよう.

$$\begin{aligned} c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} &= 0. \\ c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 3c_3e^{3x} &= 0. \\ c_1e^x + 4c_2e^{2x} + 9c_3e^{3x} &= 0. \end{aligned}$$

行列でかくと

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Example. 関数の線形独立

復習

行列表示された連立方程式

$$Ax = b.$$

が自明な解 $x = 0$ のみを持つ $\iff$

Example. 関数の線形独立

復習

行列表示された連立方程式

$$Ax = b.$$

が自明な解 $x = 0$ のみを持つ $\iff$ $\det A \neq 0$!!

Example. 関数の線形独立

さっきの係数行列の行列式を計算してみると,

Example. 関数の線形独立

さっきの係数行列の行列式を計算してみると,

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0.$$

Example. 関数の線形独立

さっきの係数行列の行列式を計算してみると,

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0.$$

よって, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ と分かるので, e^x, e^{2x}, e^{3x} は線形独立!! □

Example. 関数の線形独立

さっきの係数行列の行列式を計算してみると,

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0.$$

よって, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ と分かるので, e^x, e^{2x}, e^{3x} は線形独立!! $\square$

詳しくは触れないけど

こうして作る係数行列は **Wronski 行列 (Wronskian)** と呼ばれている.

基底

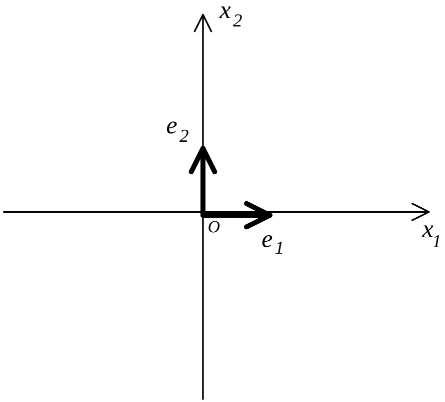
(あ, この話は編入試験で頻出だよ)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

基底

(あ, この話は編入試験で頻出だよ)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

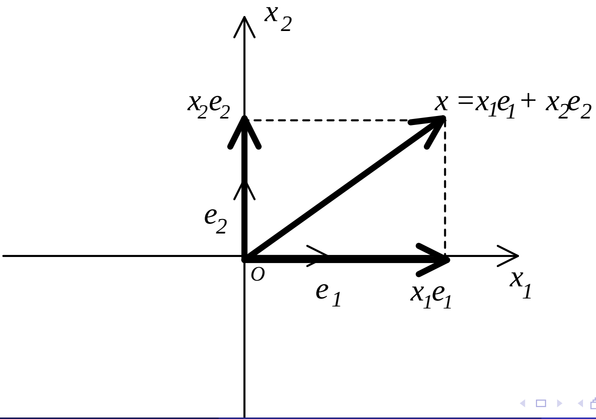


基底

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

基底

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$



基底

$e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ は $\cdots$

基底

$e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ は $\cdots$

次のような性質を持っていた

基底

$e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ は$\cdots$

次のような性質を持っていた

1. $\forall x \in \mathbb{R}^2$ が, e_1, e_2 を使って

$$x_1 e_1 + x_2 e_1$$

の形 **(e_1, e_2 の線形結合)** で表せる.

基底

$e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ は$\cdots$

次のような性質を持っていた

1. $\forall x \in \mathbb{R}^2$ が, e_1, e_2 を使って
$$x_1 e_1 + x_2 e_1$$
の形 **(e_1, e_2 の線形結合)** で表せる.
2. e_1, e_2 は**線形独立**.

基底

$e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ は $\cdots$

次のような性質を持っていた

1. $\forall x \in \mathbb{R}^2$ が, e_1, e_2 を使って
$$x_1 e_1 + x_2 e_1$$
の形 **(e_1, e_2 の線形結合)** で表せる.
2. e_1, e_2 は**線形独立**.

こんな性質を持つベクトルの組のことを, $\mathbb{R}^2$ の**基底 (basis)** と呼んだ.

基底

ということで, 基底の定義の復習

ベクトルの組 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が $\mathbb{R}^n$ の**基底 (basis)** であるとは,
$v_1, v_2, \cdots, v_k$ が次の条件を満たすことである.

基底

ということで, 基底の定義の復習

ベクトルの組 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が $\mathbb{R}^n$ の**基底 (basis)** であるとは, $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が次の条件を満たすことである.

1. $\forall v \in \mathbb{R}^n$ が,
$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k.$$
という形 ($v_1, v_2, \cdots, v_k$ の**線形結合**) で表せる.

基底

ということで, 基底の定義の復習

ベクトルの組 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が $\mathbb{R}^n$ の**基底 (basis)** であるとは,
$v_1, v_2, \cdots, v_k$ が次の条件を満たすことである.

1. $\forall v \in \mathbb{R}^n$ が,
$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k.$$
という形 ($v_1, v_2, \cdots, v_k$ の**線形結合**) で表せる.
2. $v_1, v_2, \cdots, v_k$ は**線形独立**.

基底

ということで, 基底の定義の復習

基底の取り方は色々考えられるが, **基底の個数**はどう取っても必ず一定.
その基底の数を, $\mathbb{R}^n$ の**次元 (dimension)** と呼び, $\dim \mathbb{R}^n$ と表す.

$$\dim \mathbb{R}^n = n.$$

基底

この定義も, 線形空間に流用しよう!!

定義

ベクトルの組 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が $\mathbb{R}$-線形空間 V の**基底 (basis)** であるとは, $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が次の条件を満たすことである.

基底

この定義も, 線形空間に流用しよう!!

定義

ベクトルの組 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が $\mathbb{R}$-線形空間 V の**基底 (basis)** であるとは, $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が次の条件を満たすことである.

1. $\forall v \in V$ が,
$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k.$$
という形 ($v_1, v_2, \cdots, v_k$ の**線形結合**) で表せる.

基底

この定義も, 線形空間に流用しよう!!

定義

ベクトルの組 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が $\mathbb{R}$-線形空間 V の**基底 (basis)** であるとは, $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が次の条件を満たすことである.

1. $\forall v \in V$ が,
$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k.$$
という形 ($v_1, v_2, \cdots, v_k$ の**線形結合**) で表せる.
2. $v_1, v_2, \cdots, v_k$ は**線形独立**.

基底

この定義も, 線形空間に流用しよう!!

定義

ベクトルの組 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が $\mathbb{R}$-線形空間 V の**基底 (basis)** であるとは, $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が次の条件を満たすことである.

1. $\forall v \in V$ が,
$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k.$$
という形 ($v_1, v_2, \cdots, v_k$ の**線形結合**) で表せる.
2. $v_1, v_2, \cdots, v_k$ は**線形独立**.

基底の個数は一定となり, V の**次元 (dimension)** と呼び, $\dim V$ と書く.

例：行列の基底

$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ が $M_2(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例：行列の基底

$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ が $M_2(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

示せば良いことは 2 つ!!

例：行列の基底

$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ が $M_2(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

示せば良いことは 2 つ!!

1. $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ は線形独立であること.

例：行列の基底

$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ が $M_2(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

示せば良いことは 2 つ!!

1. $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ は線形独立であること.
2. $\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が,

$$A = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4.$$

と書けること.

例：行列の基底

線形独立であることを示そう.

例：行列の基底

線形独立であることを示そう.

$$c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4 = O.$$

例：行列の基底

線形独立であることを示そう.

$$c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 + c_4 E_4 = O.$$

左辺を成分ごとに整理して書くと,

例：行列の基底

線形独立であることを示そう.

$$c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4 = O.$$

左辺を成分ごとに整理して書くと,

$$\begin{pmatrix} c_1 - c_4 & c_2 - c_3 \\ c_2 + c_3 & c_1 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例：行列の基底

線形独立であることを示そう．

$$c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4 = O.$$

左辺を成分ごとに整理して書くと，

$$\begin{pmatrix} c_1 - c_4 & c_2 - c_3 \\ c_2 + c_3 & c_1 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

成分ごとに両辺を比較すると，

例：行列の基底

線形独立であることを示そう.

$$c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4 = O.$$

左辺を成分ごとに整理して書くと,

$$\begin{pmatrix} c_1 - c_4 & c_2 - c_3 \\ c_2 + c_3 & c_1 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

成分ごとに両辺を比較すると,

$$\begin{cases} c_1 - c_4 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_4 = 0. \end{cases}$$

例：行列の基底

線形独立であることを示そう．

$$c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4 = O.$$

左辺を成分ごとに整理して書くと，

$$\begin{pmatrix} c_1 - c_4 & c_2 - c_3 \\ c_2 + c_3 & c_1 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

成分ごとに両辺を比較すると，

$$\begin{cases} c_1 - c_4 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_4 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ あとはこれをとけば，$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ を得る!!

例：行列の基底

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ として,

例：行列の基底

$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ として，

$$A = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 + c_4 E_4.$$

例：行列の基底

$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ として,

$$A = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4.$$

と置く. 両辺を成分ごとに整理して, 連立方程式をつくると,

例：行列の基底

$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ として,

$$A = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 + c_4 E_4.$$

と置く. 両辺を成分ごとに整理して, 連立方程式をつくると,

$$\begin{cases} c_1 - c_4 = a_{11} \\ c_2 - c_3 = a_{12} \\ c_2 + c_3 = a_{21} \\ c_1 + c_4 = a_{22}. \end{cases}$$

例：行列の基底

これを解くと, 次の解を得る.

例：行列の基底

これを解くと, 次の解を得る.

$$c_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}, c_2 = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}, c_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2}, c_4 = \frac{a_{22} - a_{11}}{2}.$$

例：行列の基底

これを解くと, 次の解を得る.

$$c_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}, c_2 = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}, c_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2}, c_4 = \frac{a_{22} - a_{11}}{2}.$$

この通りに c_1, c_2, c_3, c_4 を取れば,

$$A = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4.$$

例：行列の基底

これを解くと, 次の解を得る.

$$c_1 = \frac{a_{11}+a_{22}}{2}, c_2 = \frac{a_{12}+a_{21}}{2}, c_3 = \frac{a_{21}-a_{12}}{2}, c_4 = \frac{a_{22}-a_{11}}{2}.$$

この通りに c_1, c_2, c_3, c_4 を取れば,

$$A = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4.$$

と書けるので, $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底!! $\square$