線形空間の入門編 Part3

あけまつしんじ

j1701

March 14, 2013

table of contents

まずは例

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次の通りに定義

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \end{pmatrix}.$$

まずは例

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次の通りに定義

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \end{pmatrix}.$$

この写像は, $y = x$ であるベクトル $\binom{x}{y}$ をすべて 0 に送る!!

まずは例

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次の通りに定義

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix}.$$

この写像は, $y = x$ であるベクトル $\binom{x}{y}$ をすべて 0 に送る!!

例

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

まずは例

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次の通りに定義

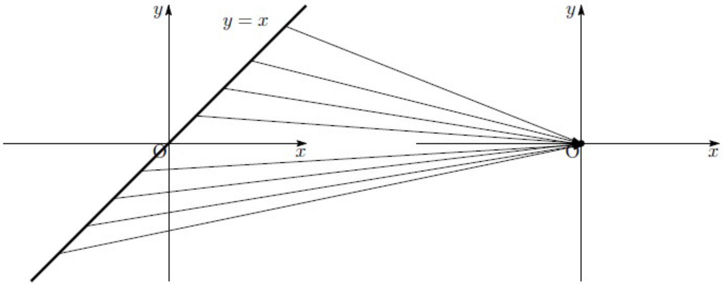
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix}.$$

この写像は, $y = x$ であるベクトル $\binom{x}{y}$ をすべて 0 に送る!!

例

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2+2 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

まずは例



まずは例

$y = x$ とはナニモノ??

$y = x$ は,

まずは例

$y = x$ とはナニモノ??

$y = x$ は,

$$f \text{ で写すと } 0 \text{ に行くベクトルの集合}$$

まずは例

$y = x$ とはナニモノ??

$y = x$ は,

$$f \text{ で写すと } 0 \text{ に行くベクトルの集合}$$

なので, 次の方程式の解!!

まずは例

$y = x$ とはナニモノ??

$y = x$ は,

$$f \text{ で写すと } 0 \text{ に行くベクトルの集合}$$

なので, 次の方程式の解!!

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

まずは例

$y = x$ とはナニモノ??

$y = x$ は,

$$f \text{ で写すと } 0 \text{ に行くベクトルの集合}$$

なので, 次の方程式の解!!

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この「**f で 0 に潰れる**」**集合**が,
とっても重要な役割を果たす!!

線形写像の核

定義

線形写像 $f : V \to W$ に対して,

線形写像の核

定義

線形写像 $f : V \to W$ に対して,

$$\mathrm{Ker}\, f \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V \mid f(x) = 0\} \subset V.$$

と定義. $\mathrm{Ker}\, f$ を線形写像 f の**核 (Kernel)** という.

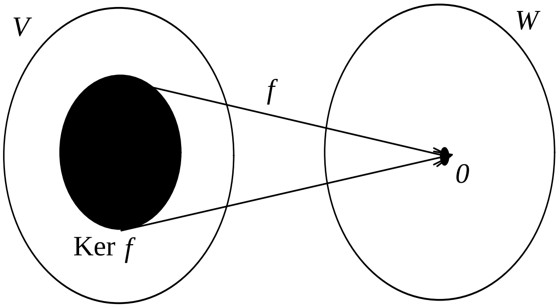
線形写像の核

定義

線形写像 $f : V \to W$ に対して,

$$\mathrm{Ker}\, f \overset{\text{def}}{=} \{x \in V \mid f(x) = 0\} \subset V.$$

と定義. $\mathrm{Ker}\, f$ を線形写像 f の**核 (Kernel)** という.



線形写像の核

Ker f をわざわざ考える理由.

線形写像の核

$\mathrm{Ker}\, f$ をわざわざ考える理由.

- $\mathrm{Ker}\, f$ は素敵な性質をいっぱい持っている!!

線形写像の核

命題

$\mathrm{Ker}\, f$ は, V の**部分空間**である.

線形写像の核

命題

Ker f は, V の**部分空間**である.

示すべきことは 3 つ!!

線形写像の核

命題

Ker f は, V の**部分空間**である.

示すべきことは 3 つ!!

- $\mathrm{Ker}\, f \neq \varnothing$.

線形写像の核

命題

$\mathrm{Ker}\, f$ は, V の**部分空間**である.

示すべきことは 3 つ!!

- $\mathrm{Ker}\, f \neq \varnothing$.
- $\forall v, w \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow v + w \in \mathrm{Ker}\, f$.

線形写像の核

命題

Ker f は, V の**部分空間**である.

示すべきことは 3 つ!!

- $\mathrm{Ker}\, f \neq \varnothing$.
- $\forall v, w \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow v + w \in \mathrm{Ker}\, f$.
- $\forall v \in \mathrm{Ker}\, f, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow cv \in \mathrm{Ker}\, f$.

線形写像の核

証明

- 線形写像の性質より，

線形写像の核

証明

- 線形写像の性質より，
$$f(0) = 0.$$

線形写像の核

証明

- 線形写像の性質より,
$$f(0) = 0.$$
よって, $0 \in \operatorname{Ker} f$ である.

線形写像の核

証明

- 線形写像の性質より,
$$f(0) = 0.$$
よって, $0 \in \operatorname{Ker} f$ である.
- $\forall v, w \in \operatorname{Ker} f$ をとる. $v + w \in \operatorname{Ker} f$ を示すために $\cdots$

線形写像の核

証明

- 線形写像の性質より，
$$f(0) = 0.$$
よって，$0 \in \operatorname{Ker} f$ である．
- $\forall v, w \in \operatorname{Ker} f$ をとる．$v + w \in \operatorname{Ker} f$ を示すために $\cdots$
$$f(v + w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0.$$

線形写像の核

証明

- 線形写像の性質より,
$$f(0) = 0.$$
よって, $0 \in \operatorname{Ker} f$ である.
- $\forall v, w \in \operatorname{Ker} f$ をとる. $v + w \in \operatorname{Ker} f$ を示すために $\cdots$
$$f(v + w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0.$$
よって, $v + w \in \operatorname{Ker} f$.
- $\forall c \in \mathbb{R}, \forall v \in \operatorname{Ker} f$ とする. $cv \in \operatorname{Ker} f$ を示すために $\cdots$

線形写像の核

証明

- 線形写像の性質より,
$$f(0) = 0.$$
よって, $0 \in \mathrm{Ker}\, f$ である.
- $\forall v, w \in \mathrm{Ker}\, f$ をとる. $v + w \in \mathrm{Ker}\, f$ を示すために$\cdots$
$$f(v+w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0.$$
よって, $v + w \in \mathrm{Ker}\, f$.
- $\forall c \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathrm{Ker}\, f$ とする. $cv \in \mathrm{Ker}\, f$ を示すために$\cdots$
$$f(cv) = cf(v) = c \cdot 0 = 0.$$

線形写像の核

証明

- 線形写像の性質より,
$$f(0) = 0.$$
よって, $0 \in \operatorname{Ker} f$ である.

- $\forall v, w \in \operatorname{Ker} f$ をとる. $v + w \in \operatorname{Ker} f$ を示すために $\cdots$
$$f(v + w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0.$$
よって, $v + w \in \operatorname{Ker} f$.

- $\forall c \in \mathbb{R}, \forall v \in \operatorname{Ker} f$ とする. $cv \in \operatorname{Ker} f$ を示すために $\cdots$
$$f(cv) = cf(v) = c \cdot 0 = 0.$$
よって, $cv \in \operatorname{Ker} f$. $\square$

また例に戻ろう.

最初の例 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix}.$$

また例に戻ろう.

最初の例 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix}.$$

いま, **適当に 4 つの点**をきめて f で写してみよう.

また例に戻ろう.

最初の例 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix}.$$

いま, **適当に 4 つの点**をきめて f で写してみよう.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

また例に戻ろう.

$$f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

また例に戻ろう.

$$
\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\\
f\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

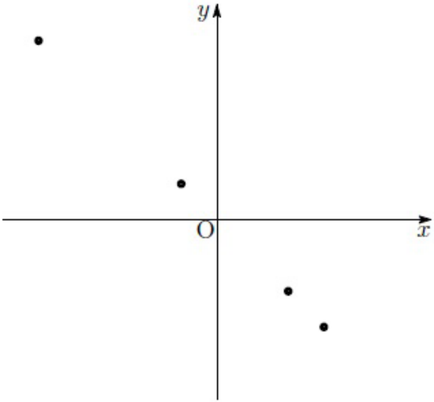
また例に戻ろう.

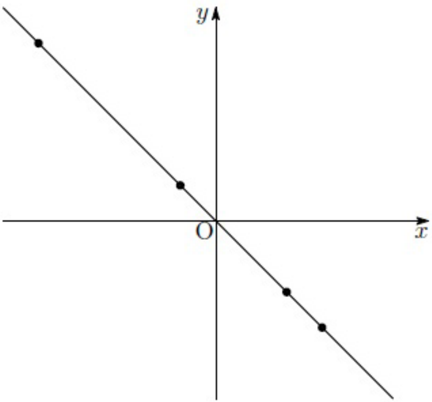
$$
\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\\
f\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}\\
f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

また例に戻ろう.

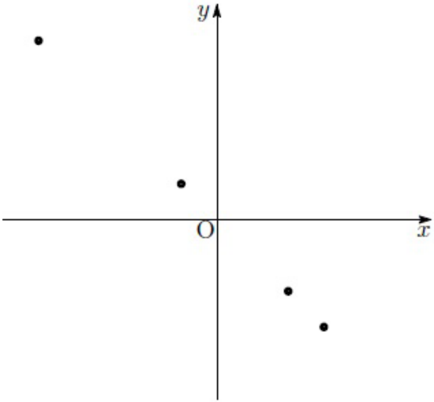
$$
\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\\
f\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}\\
f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\\
f\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

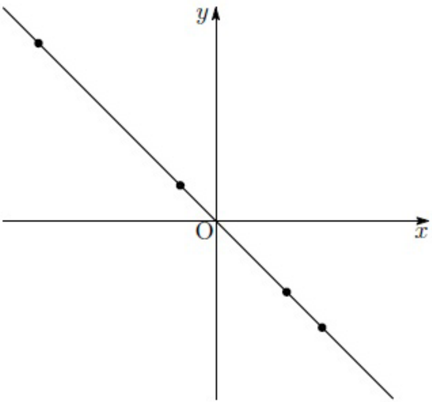
また例に戻ろう.





また例に戻ろう.





予想 直線 $y = -x$ の上に必ず乗る??

また例に戻ろう.

証明してみよう.

$\forall \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2.$

また例に戻ろう.

証明してみよう.

$\forall \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2.$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

また例に戻ろう.

証明してみよう.

$\forall \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

このことから, $\underset{\sim}{\mathbb{R}^2}$ **の元をすべて写すと**, $\left\langle \binom{1}{-1} \right\rangle$ **になる**
ということも分かる!!

また例に戻ろう.

証明してみよう.

$\forall \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

このことから, $\mathbb{R}^2$ **の元をすべて写すと**, $\left\langle \binom{1}{-1} \right\rangle$ **になる**
ということも分かる!! $\Rightarrow$ **もっと一般的に**考えよう!!

線形写像の像

定義

線形写像 $f : V \to W$ に対して,

$$\operatorname{Im} f \overset{\text{def}}{=} \{f(x) \in W \mid x \in V\} \subset W.$$

と定義. $\operatorname{Im} f$ を線形写像 f の**像 (Image)** という.

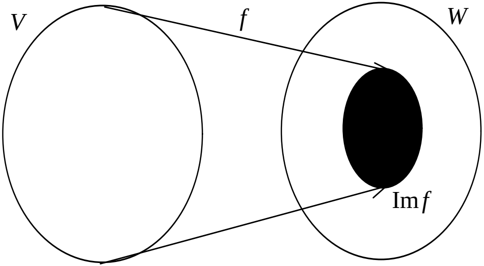
線形写像の像

定義

線形写像 $f : V \to W$ に対して,

$$\mathrm{Im}\, f \overset{\mathrm{def}}{=} \{f(x) \in W \mid x \in V\} \subset W.$$

と定義. $\mathrm{Im}\, f$ を線形写像 f の**像 (Image)** という.



線形写像の像

命題

$\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間.

線形写像の像

命題

$\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間.

Proof.

- $f(0) = 0$ より, $0 \in \mathrm{Im}\, f$.
- $\forall f(v), f(w) \in \mathrm{Im}\, f$ に対して,

$$f(v) + f(w) = f(v + w) \in \mathrm{Im}\, f.$$

- $\forall c \in \mathbb{R}, \forall f(v) \in \mathrm{Im}\, f$ に対して,

$$cf(v) = f(cv) \in \mathrm{Im}\, f.$$

よって, $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間. $\square$

線形写像の像

さっきの例では

$$\operatorname{Ker} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

線形写像の像

さっきの例では

$$\mathrm{Ker}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\mathrm{Im}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

さらに分かること

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

(**次元定理 (dimension theorem)** によってこの謎が明らかに!!)

簡単な例

次の線形写像 f の像と核の基底と次元を求めよ.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- 定義を確認!!

簡単な例

次の線形写像 f の像と核の基底と次元を求めよ.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- 定義を確認!!

$$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

簡単な例

次の線形写像 f の像と核の基底と次元を求めよ.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- 定義を確認!!

$$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Im}\, f = \left\{ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

簡単な例

- まず, $\mathrm{Ker}\, f$ を求めてみよう.

簡単な例

- まず, $\operatorname{Ker} f$ を求めてみよう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば OK.

簡単な例

- まず, $\mathrm{Ker}\, f$ を求めてみよう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば OK. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{掃き出し法}}$

簡単な例

- まず, $\mathrm{Ker}\, f$ を求めてみよう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば OK. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{掃き出し法}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \to$$

簡単な例

- まず, $\mathrm{Ker}\, f$ を求めてみよう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば OK. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{掃き出し法}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$\to$

簡単な例

- まず, Ker f を求めてみよう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば OK. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{掃き出し法}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

簡単な例

- まず, $\mathrm{Ker}\, f$ を求めてみよう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば OK. $\Rightarrow$ **掃き出し法**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

簡単な例

最後の行列から連立方程式をつくると,

簡単な例

最後の行列から連立方程式をつくると,

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \Rightarrow x = 3z \\ y + z = 0 \Rightarrow y = -z. \end{cases}$$

簡単な例

最後の行列から連立方程式をつくると,

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \Rightarrow x = 3z \\ y + z = 0 \Rightarrow y = -z. \end{cases}$$

$z = t$ とおくと, $x = 3t, y = -t$ なので,

簡単な例

最後の行列から連立方程式をつくると,

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \Rightarrow x = 3z \\ y + z = 0 \Rightarrow y = -z. \end{cases}$$

$z = t$ とおくと, $x = 3t, y = -t$ なので,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\therefore \operatorname{Ker} f = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

簡単な例

最後の行列から連立方程式をつくると,

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \Rightarrow x = 3z \\ y + z = 0 \Rightarrow y = -z. \end{cases}$$

$z = t$ とおくと, $x = 3t, y = -t$ なので,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\therefore \mathrm{Ker}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle . \dim (\mathrm{Ker}\, f) = 1.$$

簡単な例

- $\mathrm{Im}\, f$ を求めてみよう.

簡単な例

- $\mathrm{Im}\, f$ を求めてみよう.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次を計算.

簡単な例

- $\mathrm{Im}\, f$ を求めてみよう.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次を計算.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

簡単な例

- $\mathrm{Im}\, f$ を求めてみよう.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次を計算.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

簡単な例

- $\mathrm{Im}\, f$ を求めてみよう.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次を計算.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix} =$$

簡単な例

- $\mathrm{Im}\, f$ を求めてみよう.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次を計算.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

簡単な例

ここで大事なこと

3 本のベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

簡単な例

ここで大事なこと

3 本のベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

は, $\mathrm{Im}\, f$ の基底にはなっていない!! **(why?)**

簡単な例

ここで大事なこと

3 本のベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

は, $\mathrm{Im}\, f$ の基底にはなっていない!! **(why?)**

$\mathrm{Im}\, f$ の基底を求めるためには, **余計な子を取り除く**必要がある!!

簡単な例

3 つのベクトルの関係の判定

3 つのベクトルは,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

の列ベクトル.

簡単な例

3 つのベクトルの関係の判定

3 つのベクトルは,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

の列ベクトル. 実は, これを基本変形で簡単にした

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の列ベクトルどうしの関係は,
最初の行列の列ベクトルのものと同じになる!!

簡単な例

これを使うと,

簡単な例

これを使うと,

$$-3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

簡単な例

これを使うと,

$$-3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

とわかるので, 右辺に左辺を代入.

簡単な例

これを使うと,

$$-3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

とわかるので, 右辺に左辺を代入.

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+z\left[-3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

簡単な例

これを使うと,

$$-3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

とわかるので, 右辺に左辺を代入.

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+z\left[-3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

右辺を整理すると,

簡単な例

これを使うと,

$$-3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

とわかるので, 右辺に左辺を代入.

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+z\left[-3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

右辺を整理すると,

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(x-3z)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+(y+z)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

簡単な例

$x-3z=t, y+z=s$ とおきなおして,

簡単な例

$x - 3z = t, y + z = s$ とおきなおして,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

簡単な例

$x - 3z = t, y + z = s$ とおきなおして,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線形独立なので, $\mathrm{Im}\, f$ の基底!!

簡単な例

$x-3z=t, y+z=s$ とおきなおして,

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ は線形独立なので, $\mathrm{Im}\, f$ の基底!!

$\therefore \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底で,

簡単な例

$x - 3z = t, y + z = s$ とおきなおして,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線形独立なので, $\mathrm{Im}\, f$ の基底!!

$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底で, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$. □

商線形空間から次元定理へ

ここから先の内容は・・・

- 理解できなければ, **最後の結果 (次元定理)** だけ知っておこう.
(数学科でも難しいといわれている内容)
- 理解できると, **剰余群, 剰余環**等の理解の助けになる.

商線形空間から次元定理へ

これからやることのイメージ

線形空間を部分空間で**割る**!!

$$V, W : \text{linear space}, W \subset V$$

$$\Rightarrow V/W$$

商線形空間 (quotient linear space)!!

同値関係

"イコール" の性質について考えてみよう.

イコールは次のような性質を持つ

同値関係

"イコール" の性質について考えてみよう.

イコールは次のような性質を持つ

1. $a = a$ (自分と自分はイコール)

同値関係

”イコール”の性質について考えてみよう.

イコールは次のような性質を持つ

1. $a = a$ (自分と自分はイコール)
2. $a = b \Rightarrow b = a$ (a と b がイコールなら b と a もイコール)

同値関係

"イコール"の性質について考えてみよう.

イコールは次のような性質を持つ

1. $a = a$ (自分と自分はイコール)
2. $a = b \Rightarrow b = a$ (a と b がイコールなら b と a もイコール)
3. $a = b, b = c \Rightarrow a = c$ (三段論法)

同値関係

"イコール"の性質について考えてみよう.

イコールは次のような性質を持つ

1. $a = a$ (自分と自分はイコール)
2. $a = b \Rightarrow b = a$ (a と b がイコールなら b と a もイコール)
3. $a = b, b = c \Rightarrow a = c$ (三段論法)

イコールの他にも, 同じような性質を満たす"関係"が色々ある.

同値関係

例

ふたつの整数 a, b を **3 で割った余り**が同じなら,

$$a \equiv b \mod 3.$$

とすると, 次が成立.

1. $a \equiv a \mod 3$ (自分自身とは 3 で割った余りが同じ)
2. $a \equiv b \mod 3 \Rightarrow b \equiv a \mod 3.$
   (a と b の余りがおなじなら, b と a の余りが同じ)
3. $a \equiv b \mod 3, b \equiv c \mod 3 \Rightarrow a \equiv c \mod 3.$
   (a と b の余りが同じ, b と c の余りが同じなら, a と c も同じ)

同値関係

例

ふたつの整数 a, b を **3 で割った余り**が同じなら,

$$a \equiv b \mod 3.$$

とすると, 次が成立.

1. $a \equiv a \mod 3$ (自分自身とは 3 で割った余りが同じ)
2. $a \equiv b \mod 3 \Rightarrow b \equiv a \mod 3.$
   (a と b の余りがおなじなら, b と a の余りが同じ)
3. $a \equiv b \mod 3, b \equiv c \mod 3 \Rightarrow a \equiv c \mod 3.$
   (a と b の余りが同じ, b と c の余りが同じなら, a と c も同じ)

$a \equiv b \mod 3$ のとき, a, b は **3 を法として合同**という.

同値関係

例

ふたつの命題 P, Q が**同値**なら,

$$P \iff Q.$$

とすると, 次が成立.

1. $P \iff Q$ (自分と自分は同値)
2. $P \iff Q \quad \Rightarrow \quad Q \iff P.$
   (P と Q が同値なら, Q と P も同値)
3. $P \iff Q, Q \iff R \quad \Rightarrow \quad P \iff R$
   (P と Q が同値, Q と R が同値なら, P と R も同値)

同値関係

大事な"関係"は, 一般にこういう性質を持っていることが多い.

同値関係

大事な"関係"は, 一般にこういう性質を持っていることが多い.

定義

関係 $\sim$ が以下の性質を満たすとき,
$\sim$ は**同値関係 (equivalent relation)** であるという.

同値関係

大事な"関係"は, 一般にこういう性質を持っていることが多い.

定義

関係 $\sim$ が以下の性質を満たすとき,
$\sim$ は**同値関係 (equivalent relation)** であるという.

1. $a \sim a$. (反射律 / Reflexive)

同値関係

大事な"関係"は, 一般にこういう性質を持っていることが多い.

定義

関係 $\sim$ が以下の性質を満たすとき,
$\sim$ は**同値関係 (equivalent relation)** であるという.

1. $a \sim a$. (反射律 / Reflexive)
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$. (対称律 / Symmetric)

同値関係

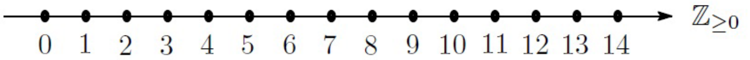
大事な"関係"は, 一般にこういう性質を持っていることが多い.

定義

関係 $\sim$ が以下の性質を満たすとき,
$\sim$ は**同値関係 (equivalent relation)** であるという.

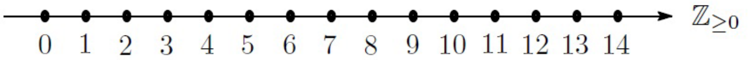
1. $a \sim a$. (反射律 / Reflexive)
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$. (対称律 / Symmetric)
3. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$. (推移律 / Transitive)

商集合



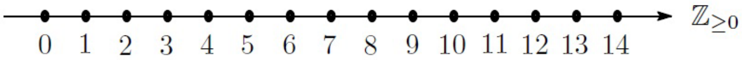
「3 を法として合同」という同値関係を考える.

商集合



「3 を法として合同」という同値関係を考える.
$\Rightarrow$ "合同な数" を集めて分類してみる.

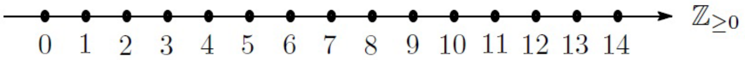
商集合



「3 を法として合同」という同値関係を考える.
⇒ "合同な数" を集めて分類してみる.

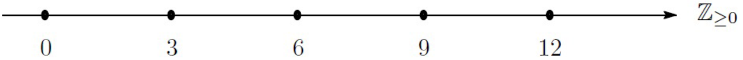
3 で割った余りが 0 の数だけを集めた.

商集合



「3 を法として合同」という同値関係を考える.

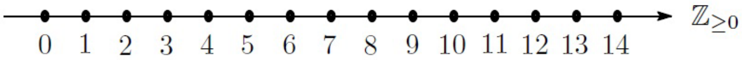
⇒ "合同な数" を集めて分類してみる.



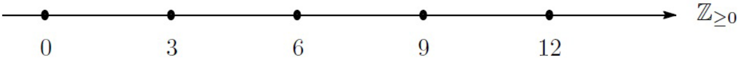
3 で割った余りが 0 の数だけを集めた.

3 で割った余りが 1 の数だけを集めた.

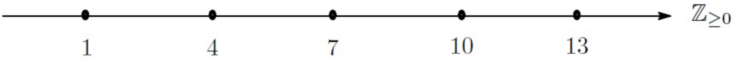
商集合



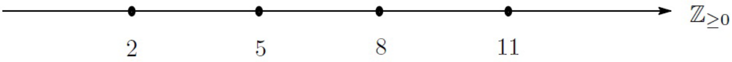
「3 を法として合同」という同値関係を考える.
⇒ "合同な数" を集めて分類してみる.



3 で割った余りが 0 の数だけを集めた.



3 で割った余りが 1 の数だけを集めた.



3 で割った余りが 2 の数だけを集めた.

商集合

1. **3 で割った余りが 0 の数**を集めた集合 $\stackrel{\text{def}}{=} \bar{0}$
2. **3 で割った余りが 1 の数**を集めた集合 $\stackrel{\text{def}}{=} \bar{1}$
3. **3 で割った余りが 2 の数**を集めた集合 $\stackrel{\text{def}}{=} \bar{2}$

商集合

1. **3 で割った余りが 0 の数**を集めた集合 $\stackrel{\text{def}}{=} \bar{0}$
2. **3 で割った余りが 1 の数**を集めた集合 $\stackrel{\text{def}}{=} \bar{1}$
3. **3 で割った余りが 2 の数**を集めた集合 $\stackrel{\text{def}}{=} \bar{2}$

$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ を**同値類**といい, $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ の任意の元を**代表元**という.

商集合

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}/\equiv \ \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}.$$

商集合

1. **3 で割った余りが 0 の数**を集めた集合 $\stackrel{\text{def}}{=} \bar{0}$
2. **3 で割った余りが 1 の数**を集めた集合 $\stackrel{\text{def}}{=} \bar{1}$
3. **3 で割った余りが 2 の数**を集めた集合 $\stackrel{\text{def}}{=} \bar{2}$

$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ を**同値類**といい, $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ の任意の元を**代表元**という.

商集合

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}/\equiv \;\stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}.$$

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の $\equiv$ による**商集合 (quotient set)**.

商集合

一般の同値関係についても同じ事ができる!!

商集合

一般の同値関係についても同じ事ができる!!

定義

集合 X の上の同値関係 $\sim$ に対して,

$$X/\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x} \mid x \in X\}.$$

を, X の $\sim$ による**商集合 (quotient set)** という.
$(\bar{x} = \{y \in X \mid x \sim y\})$

商線形空間

V は $\mathbb{R}$-線形空間, W は部分空間とする.

商線形空間

V は $\mathbb{R}$-線形空間, W は部分空間とする.

次のような関係を考える.

$$v \sim w \overset{\text{def}}{\iff} v - w \in W.$$

商線形空間

V は $\mathbb{R}$-線形空間, W は部分空間とする.

次のような関係を考える.

$$v \sim w \overset{\text{def}}{\iff} v - w \in W.$$

これは, V の上の**同値関係**になる.

商線形空間

V は $\mathbb{R}$-線形空間, W は部分空間とする.

次のような関係を考える.

$$v \sim w \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} v - w \in W.$$

これは, V の上の**同値関係**になる.

この同値関係により, V の商集合を考える.

定義

$$V/W \overset{\text{def}}{=} V/\sim.$$

と定義し, V/W を V の W による
商線形空間 (quotient linear space) という.

商線形空間

定理

$V/W = \{\bar{v} \mid v \in V\}$ は次の和とスカラー倍について $\mathbb{R}$-線形空間になる.

商線形空間

定理

$V/W = \{\bar{v} \mid v \in V\}$ は次の和とスカラー倍について $\mathbb{R}$-線形空間になる.

- $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$
- $c\bar{x} = \overline{cx}$

商線形空間

証明

演算が **well-defined (代表元の選び方によらない)** ということを示す.

- $\bar{v}, \bar{w}$ のそれぞれの別の代表元を v', w' とする.
  $\bar{v} + \bar{w} = \bar{v'} + \bar{w'}$ を示す. $v' \in \bar{v}, w' \in \bar{w}$ より,

$$\exists x, y \in W \ \ s.t. \ v + x, w' = w + y.$$

$$\begin{aligned}
\bar{v'} + \bar{w'} &= \overline{v' + w'} \\
&= \overline{v + x + w + y} \\
&= \overline{v + w} + \overline{x + y} \\
&= \overline{v + w} + \bar{0} \\
&= \overline{v + w}
\end{aligned}$$

商線形空間

証明

- $c\bar{v} = c\bar{v'}$ を示す．$v' \in \bar{v}$ より，

$$\exists x \in W \;\; s.t. \;\; v' = v + x.$$

$$\begin{aligned} c\bar{v'} &= \overline{cv'} \\ &= \overline{c(v+x)} = \overline{cv+cx} \\ &= \overline{cv} + \overline{cx} \\ &= \overline{cv} + \bar{0} \\ &= c\bar{v} \end{aligned}$$

商線形空間

証明

- $c\bar{v} = c\bar{v'}$ を示す．$v' \in \bar{v}$ より，

$$\exists x \in W \ s.t. \ v' = v + x.$$

$$\begin{aligned} c\bar{v'} &= \overline{cv'} \\ &= \overline{c(v+x)} = \overline{cv+cx} \\ &= \overline{cv} + \overline{cx} \\ &= \overline{cv} + \bar{0} \\ &= c\bar{v} \end{aligned}$$

$\therefore$ 和とスカラー倍は well-defined．さらに, V/W は明らかに和とスカラー倍について閉じていて, 8 つの代数的性質を満たす．
よって, $\mathbb{R}$-線形空間．□

準同型定理から次元定理へ

定義

線形写像 $f : V \to W$ が**全単射**のとき, f を**線形同型写像 (linear isomorphism)** と呼ぶ. f が線形同型写像であることを次のように書く.

$$f : V \xrightarrow{\sim} W$$

また, 線形空間 V, W の間に線形同型写像が存在するとき,
V, W は**同型 (isomorphic)** であるといい, $V \simeq W$ とかく
(線形空間としての構造が全く同じ).

準同型定理から次元定理へ

定理

準同型定理 線形写像 ver. $f : V \to W$ を線形写像とする．f は自然な線形同型写像

$$\varphi : V/\mathrm{Ker}\, f \overset{\sim}{\to} \mathrm{Im}\, f$$

$$\varphi(\bar{v}) = f(v).$$

を引き起こす.

準同型定理から次元定理へ

定理

準同型定理 線形写像 ver. $f : V \to W$ を線形写像とする．f は自然な線形同型写像

$$\varphi : V/\mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$$

$$\varphi(\bar{v}) = f(v).$$

を引き起こす.

示すべきことは 4 つ!!

準同型定理から次元定理へ

定理

準同型定理 線形写像 ver. $f : V \to W$ を線形写像とする. f は自然な線形同型写像

$$\varphi : V/\mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$$

$$\varphi(\bar{v}) = f(v).$$

を引き起こす.

示すべきことは 4 つ!!

1. φ は well-defined (代表元のとりかたによらずに値が定まる)

準同型定理から次元定理へ

定理

準同型定理 線形写像 ver. $f : V \to W$ を線形写像とする. f は自然な線形同型写像

$$\varphi : V/\mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$$

$$\varphi(\bar{v}) = f(v).$$

を引き起こす.

示すべきことは 4 つ!!

1. φ は well-defined (代表元のとりかたによらずに値が定まる)
2. φ は線形写像.

準同型定理から次元定理へ

定理

準同型定理 線形写像 ver. $f : V \to W$ を線形写像とする. f は自然な線形同型写像

$$\varphi : V/\mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$$

$$\varphi(\bar{v}) = f(v).$$

を引き起こす.

示すべきことは 4 つ!!

1. φ は well-defined (代表元のとりかたによらずに値が定まる)
2. φ は線形写像.
3. φ は全射.

準同型定理から次元定理へ

定理

準同型定理 線形写像 ver. $f : V \to W$ を線形写像とする. f は自然な線形同型写像

$$\varphi : V/\mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$$

$$\varphi(\bar{v}) = f(v).$$

を引き起こす.

示すべきことは 4 つ!!

1. φ は well-defined (代表元のとりかたによらずに値が定まる)
2. φ は線形写像.
3. φ は全射.
4. φ は単射.

準同型定理から次元定理へ

証明

- φ は well-defined. $\forall \bar{v} \in V/\mathrm{Ker}\, f$ とし, 別の代表元を v' とする.

  $v' \in \bar{v}$ より, $\exists x \in \mathrm{Ker}\, f$ $s.t.$ $v' = v + x$.

$$
\begin{aligned}
\varphi(\bar{v'}) &= f(v') = f(v + x) \\
&= f(v) + f(x) \\
&= f(v) + 0 \quad (\because x \in \mathrm{Ker}\, f).
\end{aligned}
$$

  よって, $f(v') = f(v)$ だから, well-defined.

準同型定理から次元定理へ

証明

- φ は線形写像.

$$\begin{aligned}\varphi(\overline{v}+\overline{w}) &= f(v+w)\\ &= f(v)+f(w)\\ &= \varphi(\bar{v})+\varphi(\bar{w}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(c\overline{v}) &= f(cv)\\ &= cf(v)\\ &= c\varphi(\bar{v}).\end{aligned}$$

よって, φ は線形写像.

準同型定理から次元定理へ

証明

- φ は全射.
  $\forall f(v) \in \mathrm{Im}\, f$ をとる.
  $\bar{v} \in V/\mathrm{Ker}\, f$ をとると, $\varphi(\bar{v}) = f(v)$ なので, 全射.

準同型定理から次元定理へ

証明

- φ は全射.
  $\forall f(v) \in \mathrm{Im}\, f$ をとる.
  $\bar{v} \in V/\mathrm{Ker}\, f$ をとると, $\varphi(\bar{v}) = f(v)$ なので, 全射.

- φ は単射.
  任意の線形写像について,
  $$f \text{ が単射} \iff \mathrm{Ker}\, f = \{0\}.$$
  という定理を使う (証明せよ!!). $\forall \bar{v} \in \mathrm{Ker}\, \varphi$ をとると,
  $\varphi(\bar{v}) = f(v) = 0$ より, $v \in \mathrm{Ker}\, f$.
  $\therefore \bar{v} = \bar{0}$ となり, $\mathrm{Ker}\, \varphi = \{\bar{0}\}$.
  よって, φ は全単射. □

準同型定理から次元定理へ

命題

V が有限次元 $\mathbb{R}$-線形空間, W はその部分空間とすると,

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

Proof.

略 (商線形空間の基底の個数を数えることで得られる) □

準同型定理から次元定理へ

次元定理 (dimension theorem)

$f : V \to W$ を線形写像とする.

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim V.$$

次元定理 (dimension theorem)

$f : V \to W$ を線形写像とする.

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim V.$$

Proof.

$$V/\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Im}\, f.$$

より, 両辺に dim をとると,

$$\dim V - \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim(\mathrm{Im}\, f).$$

あとは移項して, 次元定理を得る. □

レクチャーで取り上げた内容

レクチャーで取り上げた内容

1.
   - 線形空間の定義
   - 線形空間の例
   - 線形独立, 線形従属
   - 基底

レクチャーで取り上げた内容

1.
   - 線形空間の定義
   - 線形空間の例
   - 線形独立, 線形従属
   - 基底
2.
   - 部分空間
   - 写像
   - 線形写像

レクチャーで取り上げた内容

1.
    - 線形空間の定義
    - 線形空間の例
    - 線形独立, 線形従属
    - 基底
2.
    - 部分空間
    - 写像
    - 線形写像
3.
    - 線形写像の像と核
    - 商線形空間
    - 準同型定理 (線形写像 ver)
    - 次元定理

ありがとう。

Thank you !!!
Good luck !!!