基本的な無限級数の計算

等比級数, 等比 $\times$ 等差型の級数

2011 年 7 月 27 日

1　等比数列の和

1.1　等比級数

初項 a, 公比 r の等比数列 $\{a, ra, r^2a, \cdots, r^na, \cdots\}$ の和

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k a = a + ra + r^2a + \cdots + r^n a. \ (r \neq 1)$$

(等比級数) の値の求め方を考える. このような等比級数は, 以下のような手順に従って求められる.

1. $S_n = a + ra + \cdots + r^n a$ の両辺に公比 r をかけて次の式を得る.

$$rS_n = ra + r^2a + \cdots + r^n a + r^{n+1}a.$$

2. $S_n = \cdots$ の式から $rS_n = \cdots$ の式を辺々引く.

$$\begin{aligned} S_n &= a + ra + \cdots + r^n a \\ rS_n &= \qquad ra + r^2a + \cdots + r^n a + r^{n+1}a. \end{aligned}$$

辺々引けば,

$$(1-r)S_n = a - r^{n+1}a.$$

3. 両辺を $1-r$ で割ると,

$$S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}a.$$

この公式は**等比数列の和の公式**と呼ばれ, 数学の様々な場面で極めて重要な役割を演じる. よって, この公式を覚えておいても良い. （が, 導出は簡単なので, 導出ができるようになっておくのが望ましい）

ちなみに, 最初に $r \neq 1$ を仮定したが, $r = 1$ の場合は, 簡単に次の結果を得る.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k a = a + a + a + \cdots + a = (n+1)a.$$

1.2　無限等比級数

先ほど導出した公式,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} r^k a = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}a. \quad (r \neq 1)$$

において, $n \to \infty$ とすることにより, **無限等比級数** $\sum_{k=1}^{\infty} r^k a$ の値が次のように分かる.

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k a = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r}a & (|r| < 1) \\ \infty & (|r| \geq 1) \end{cases}$$

すなわち, $|r| < 1$ のとき (r^{n+1} が $n \to \infty$ で $r^{n+1} \to 0$ となる) 無限等比級数は和を持ち, 値が $\frac{1}{1-r}a$ となる.
特に, $|r| < 1$ の時の次の無限級数（**幾何級数**）

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

は, $a = 1$ の場合と考えられるので,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

という結果を得る. (この結果も非常に重要である.)

2　等差 $\times$ 等比 型の無限級数

たとえば次の無限級数は, (等差数列)×(等比数列) の形をしている.

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot r^k = 1 \cdot r + 2 \cdot r^2 + \cdots + n \cdot r^n + \cdots$$

このような形の無限級数は, 等比級数と似た方法で値を求めることができるので, 頭に入れておこう.

1. $$S_n = 1 \cdot r + 2 \cdot r^2 + \cdots + n \cdot r^n$$

   から, 両辺に公比 r をかけた次の和を辺々引く.

   $$rS_n = 1 \cdot r^2 + 2 \cdot r^3 + \cdots + n \cdot r^{n+1}$$

   結果として次が得られる.

   $$(1-r)S_n = \underbrace{(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n)}_{(*)} - nr^{n+1}.$$

2. ところで, $(*)$ の部分は有限な等比級数なので, 等比数列 (初項 r, 公比 r) の和の公式より,

   $$(1-r)S_n = \frac{1-r^n}{1-r}r - nr^{n+1}.$$

   両辺を $1-r$ で割れば,

   $$S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2}r - \frac{nr^{n+1}}{1-r}.$$

3. $n \to \infty$ とすれば, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$ の値を得られる.

このようなパターンの無限級数の例

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \quad \text{など.}$$